

Lançamento oblíquo incluindo força de arrasto por videoanálise

Oblique launch including drag force by video analysis

E.S. Silva¹, A.L. de Oliveira¹, V.L.B. de Jesus^{*1}

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Nilópolis, RJ, Brasil.

Recebido em 12 de novembro de 2023. Revisado em 08 de março de 2024. Aceito em 14 de março de 2024.

Apresentamos a videoanálise do lançamento oblíquo de cinco bolas de isopor no ar, evidenciando o efeito da força de arrasto. Gráficos das trajetórias, das coordenadas de posição e velocidade em função do tempo são obtidas numericamente pelo método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4) e superpostas aos dados experimentais, sendo também comparadas ao caso ideal sem força de arrasto. Os valores dos coeficientes de arrasto utilizados no cálculo numérico RK4 são compatíveis com aqueles apresentados na literatura. Foram obtidas as medidas das energias cinética, potencial gravitacional, mecânica e do módulo do trabalho da força de arrasto de cada sistema em função do tempo, mostrando que a redução da energia mecânica é mais pronunciada nos intervalos onde a variação da energia cinética é maior.

Palavras-chave: Força de arrasto, lançamento oblíquo, videoanálise, Runge-Kutta.

We present the video analysis of the oblique launch of five Styrofoam balls into the air, highlighting the effect of the drag force. Graphs of the trajectories, position, and velocity coordinates as a function of time are obtained numerically using the fourth-order Runge-Kutta method (RK4) and superimposed on the experimental data and compared to the ideal case without drag force. The values of the drag coefficients used in the RK4 numerical calculation are compatible with those presented in the literature. Measurements of each system's kinetic, gravitational potential and mechanical energies, as well the modulus of the work of the drag force were obtained as a function of time, showing that the reduction in mechanical energy is more pronounced in the intervals where the variation of the kinetic energy is greater.

Keywords: Drag force, oblique launch, video analysis, Runge-Kutta.

1. Introdução

Efeitos de arrasto sobre corpos em movimento apresentam interesse analítico e experimental, uma vez que diversas situações práticas demandam por modelagens precisas dessas influências. Encontramos obras didáticas e artigos científicos dedicados a investigações do tema, com propósitos analíticos variados [1–6].

No presente trabalho, buscamos contribuir com uma discussão recente encontrada no volume 45 deste periódico, envolvendo o movimento de projéteis [7] e críticas associadas [8, 9], mas apresentaremos uma abordagem com ênfase experimental, uma vez que as argumentações encontradas parecem se concentrar numa perspectiva analítica. Realizamos uma sequência de lançamentos oblíquos de cinco bolas de isopor no ar onde o efeito da força de arrasto é evidenciado e investigado. Os dados experimentais foram obtidos por videoanálise. Os resultados experimentais foram comparados por cálculo numérico baseado no método de Runge-Kutta de quarta ordem, já que uma solução analítica exata deste problema não é conhecida [5, 8, 9].

2. Modelo Teórico

2.1. Força de arrasto sobre uma esfera que se movimenta no ar

Considere uma esfera rígida experimentando resistência ao se movimentar no ar. Sabemos que a interação entre ar e esfera pode gerar forças e torques em diferentes direções e sentidos. A força de arrasto se deve aos efeitos combinados da pressão e das forças de cisalhamento, na direção do escoamento. Nos chamados escoamentos bidimensionais, a resultante das forças de pressão e de cisalhamento pode ser dividida em duas componentes: uma na direção do escoamento, que é a força de arrasto e outra na direção normal ao escoamento, que é a força de sustentação. Para escoamentos tridimensionais, pode haver uma componente lateral perpendicular a essas duas, que tende a mover o objeto nessa direção perpendicular [10, 11].

Do ponto de vista experimental, as forças de arrasto \vec{F}_D e de sustentação \vec{F}_S dependem da densidade do fluido ρ , da velocidade relativa entre o corpo e o fluido v e de outras influências como a forma e orientação do corpo. Na prática, podemos modelar a influência global,

*Endereço de correspondência: vitor.jesus@ifrj.edu.br

em uma variedade de situações, por meio de parâmetros adimensionais denominados coeficientes de arrasto C_D e de sustentação C_S , definidos na forma [10, 11]:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}A\rho v^2} \quad (1)$$

e

$$C_S = \frac{F_S}{\frac{1}{2}A\rho v^2} \quad (2)$$

sendo A a área frontal, ou seja, a área projetada sobre um plano normal à direção de escoamento. Observe que os coeficientes de arrasto e sustentação são primariamente funções da forma do corpo, mas em alguns casos, podem variar conforme o número de Reynolds e da rugosidade da superfície, devendo ser avaliados especificamente nas situações de interesse. De fato, os coeficientes de arrasto e sustentação variam ao longo da superfície por conta dos gradientes de velocidade associados à dinâmica de escoamento. Em nosso caso, estamos interessados nas forças de arrasto e sustentação para a superfície de toda a esfera, que pode ser avaliada usando os coeficientes médios de arrasto e sustentação [10].

A força de arrasto pode ser modelada como sendo proporcional ao quadrado da velocidade na situação prática de uma esfera se movimentando no ar, expressa na forma [10]

$$\vec{F}_D = -bv\vec{v}, \quad (3)$$

sendo $b = C_D A \rho / 2$. A equação (3) é associada a números de Reynolds (Re) no intervalo $1 \ll Re \leq 10^5$ [3, 10], que se encaixa no caso abordado neste trabalho envolvendo o lançamento oblíquo de bolas de isopor no ar [6]. Vale destacar que o número de Reynolds é utilizado para avaliar o regime de escoamento de fluidos em superfícies, podendo ser expresso matematicamente como $Re = \rho D v / \eta$, sendo ρ a densidade do fluido, D o diâmetro da esfera (comprimento característico da geometria do corpo), v a velocidade média de escoamento e η a viscosidade dinâmica do fluido. Para número de Reynolds grandes, as forças inerciais são grandes em relação às forças viscosas e, portanto, essas forças não podem evitar flutuações aleatórias e rápidas no fluido, características de um regime turbulento. Por outro lado, números de Reynolds baixos associam-se a escoamentos denominados laminares, onde as forças viscosas são suficientemente grandes para suprimir as flutuações aleatórias [10, 11]. Conforme descrito em [3], um modelo linear na velocidade pode ser considerado para alguns outros cenários e associados a número de Reynolds mais baixos $Re \leq 1$, que é o caso da gota de óleo se movimentando no ar no experimento de Millikan [12].

No caso da esfera lançada obliquamente no ar, podemos considerá-la sujeita à interação gravitacional com a Terra e ao arrasto proporcional ao quadrado da velocidade, reescrevendo a equação (3) em termos de

suas componentes

$$m \frac{dv_x}{dt} = -bv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4)$$

e

$$m \frac{dv_y}{dt} = -mg - bv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (5)$$

que configuram um sistema de equações não lineares acopladas. Esse sistema de equações não apresenta solução analítica, mas pode ser investigado do ponto de vista numérico. Neste trabalho, implementamos uma análise numérica utilizando o método de Runge-Kutta de quarta-ordem, descrito na sequência.

2.2. Método Runge-Kutta

Em análise numérica, os métodos Runge-Kutta formam uma família importante de métodos iterativos e explícitos para a resolução numérica de soluções para equações diferenciais ordinárias. No presente trabalho, utilizamos o método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), descrito sinteticamente a seguir para o caso de uma equação diferencial de primeira ordem [13].

Seja um problema de valor inicial especificado na forma

$$y' = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (6)$$

o método RK4 para este problema é dado por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (7)$$

e

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (8)$$

sendo y_{n+1} a aproximação por RK4 de $y(t_{n+1})$, e os coeficientes k_i dados por

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (9)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (10)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (11)$$

e

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \quad (12)$$

em que o valor de y_{n+1} é determinado pelo valor atual y_n somado ao produto do tamanho do intervalo h com uma inclinação estimada α . Fazendo uma média ponderada das inclinações e dando um peso maior àquelas relativas ao ponto médio, temos

$$\alpha = \frac{1k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 1k_4}{6}. \quad (13)$$

O RK4 é um método de quarta ordem, significando que o erro por passo é da ordem de h^5 , enquanto o erro acumulado tem ordem h^4 .

Para resolver o sistema de equações não lineares acoplado, equações (4) e (5), utilizamos o método RK4. Portanto, primeiramente calculamos os coeficientes k_{iv_x} e k_{iv_y} associados às componentes do vetor velocidade v_{x_n} e v_{y_n} , respectivamente, i.e.,

$$k_{1v_x} = -\left(\frac{b}{m}\right)v_{x_n}\sqrt{v_{x_n}^2 + v_{y_n}^2}$$

e

$$k_{1v_y} = -g - \left(\frac{b}{m}\right)v_{y_n}\sqrt{v_{x_n}^2 + v_{y_n}^2}.$$

Observe que os coeficientes k_{1v_x} e k_{1v_y} também são acoplados, por isso devem ser calculados simultaneamente. De posse dos coeficientes k_{1v_x} e k_{1v_y} , podemos calcular

$$k_{2v_x} = -\left(\frac{b}{m}\right)\left(v_{x_n} + \frac{hk_{1v_x}}{2}\right) \times \sqrt{\left(v_{x_n} + \frac{hk_{1v_x}}{2}\right)^2 + \left(v_{y_n} + \frac{hk_{1v_y}}{2}\right)^2}$$

e

$$k_{2v_y} = -g - \left(\frac{b}{m}\right)\left(v_{y_n} + \frac{hk_{1v_y}}{2}\right) \times \sqrt{\left(v_{x_n} + \frac{hk_{1v_x}}{2}\right)^2 + \left(v_{y_n} + \frac{hk_{1v_y}}{2}\right)^2}$$

Da mesma maneira,

$$k_{3v_x} = -\left(\frac{b}{m}\right)\left(v_{x_n} + \frac{hk_{2v_x}}{2}\right) \times \sqrt{\left(v_{x_n} + \frac{hk_{2v_x}}{2}\right)^2 + \left(v_{y_n} + \frac{hk_{2v_y}}{2}\right)^2}$$

e

$$k_{3v_y} = -g - \left(\frac{b}{m}\right)\left(v_{y_n} + \frac{hk_{2v_y}}{2}\right) \times \sqrt{\left(v_{x_n} + \frac{hk_{2v_x}}{2}\right)^2 + \left(v_{y_n} + \frac{hk_{2v_y}}{2}\right)^2}.$$

Finalmente, obtemos

$$k_{4v_x} = -\left(\frac{b}{m}\right)(v_{x_n} + hk_{3v_x}) \times \sqrt{(v_{x_n} + hk_{3v_x})^2 + (v_{y_n} + hk_{3v_y})^2}$$

e

$$k_{4v_y} = -g - \left(\frac{b}{m}\right)(v_{y_n} + hk_{3v_y}) \times \sqrt{(v_{x_n} + hk_{3v_x})^2 + (v_{y_n} + hk_{3v_y})^2}.$$

De posse dos coeficientes k_{iv_x} e k_{iv_y} podemos então calcular as componentes do vetor velocidade,

$$v_{x(n+1)} = v_{x_n} + \frac{h}{6}(k_{1v_x} + 2k_{2v_x} + 2k_{3v_x} + k_{4v_x})$$

e

$$v_{y(n+1)} = v_{y_n} + \frac{h}{6}(k_{1v_y} + 2k_{2v_y} + 2k_{3v_y} + k_{4v_y}).$$

A partir dos valores das componentes do vetor velocidade $v_{x(n+1)}$ e $v_{y(n+1)}$, podemos calcular as componentes do vetor posição $x_{(n+1)}$ e $y_{(n+1)}$ utilizando o mesmo procedimento, observando agora que os coeficientes k_{ix} e k_{iy} são desacoplados

$$k_{1x} = v_{x(n+1)},$$

$$k_{1y} = v_{y(n+1)},$$

$$k_{2x} = v_{x(n+1)} + \frac{h}{2}k_{1x},$$

$$k_{2y} = v_{y(n+1)} + \frac{h}{2}k_{1y},$$

$$k_{3x} = v_{x(n+1)} + \frac{h}{2}k_{2x},$$

$$k_{3y} = v_{y(n+1)} + \frac{h}{2}k_{2y},$$

$$k_{4x} = v_{x(n+1)} + hk_{3x},$$

e

$$k_{4y} = v_{y(n+1)} + hk_{3y}.$$

Utilizando os coeficientes k_{ix} e k_{iy} , obtemos as coordenadas

$$x_{(n+1)} = x_n + \frac{h}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})$$

e

$$y_{(n+1)} = y_n + \frac{h}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

De posse dos dados numéricos das coordenadas dos vetores posição e velocidade, podemos comparar os resultados da trajetória, posição e velocidade em função do tempo com os dados experimentais obtidos por videoanálise.

3. Procedimento Experimental e Discussão dos Resultados

As filmagens foram realizadas no laboratório didático de física básica utilizando cinco bolas de isopor cujas características são apresentadas na Tabela 1. Foi utilizada uma câmera *GoPro* para filmagens a 240 fps. A videoanálise foi realizada considerando apenas 120 fps, feita parcialmente pelo "auto-tracker", corrigida durante

Tabela 1: Características das bolas de isopor: diâmetro (D), massa (m) e densidade (ρ_b).

Bola	D (m)	m (10^{-3} kg)	ρ_b (10^{-3} kg/m ³)
1	0,07674(2)	4,21(1)	17,79(4)
2	0,05036(2)	1,55(1)	23,2(2)
3	0,03500(2)	0,66(1)	29,4(4)
4	0,02502(2)	0,36(1)	44(1)
5	0,01540(2)	0,10(1)	52(5)

e ao término do processo a partir da ampliação de cada frame.

Os lançamentos das bolas de isopor foram feitos manualmente, com ângulos iniciais entre 50° e 60° e alcances entre 1 m e 2 m. A câmera estava posicionada a aproximadamente 3 m de distância do plano do movimento das esferas. No início de cada vídeo, o lançador colocava uma régua de 1 m de comprimento no plano de lançamento, que posteriormente é utilizada como calibração na videoanálise. A Figura 1 mostra um instantâneo de tela do software livre Tracker durante a videoanálise da bola de isopor 1 e uma fotografia estroboscópica (com cinco frames de intervalo) de sua trajetória [14–16].

A Figura 2 apresenta as trajetórias referentes aos lançamentos das bolas de isopor. Os pontos experimentais são superpostos ao cálculo numérico realizado pelo método Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).

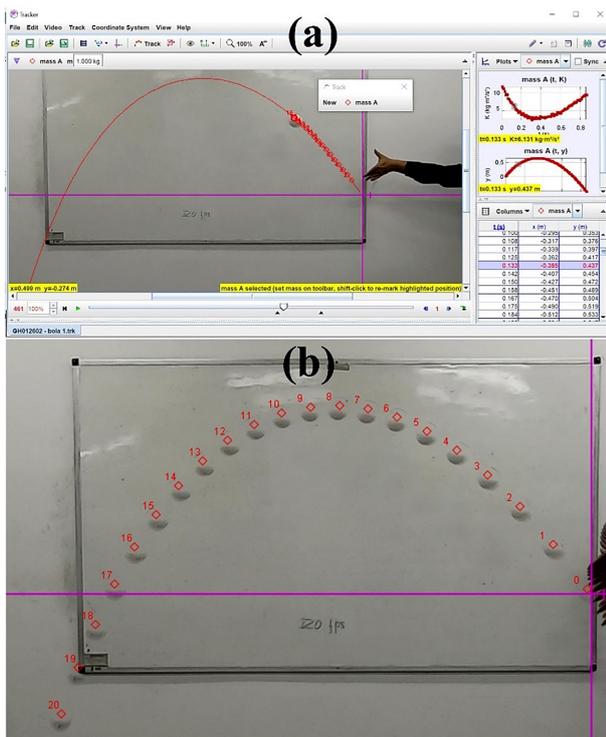


Figura 1: (a) Instantâneo de tela do software livre Tracker durante a videoanálise da bola de isopor 1 e (b) uma fotografia estroboscópica (com cinco frames de intervalo) de sua trajetória.

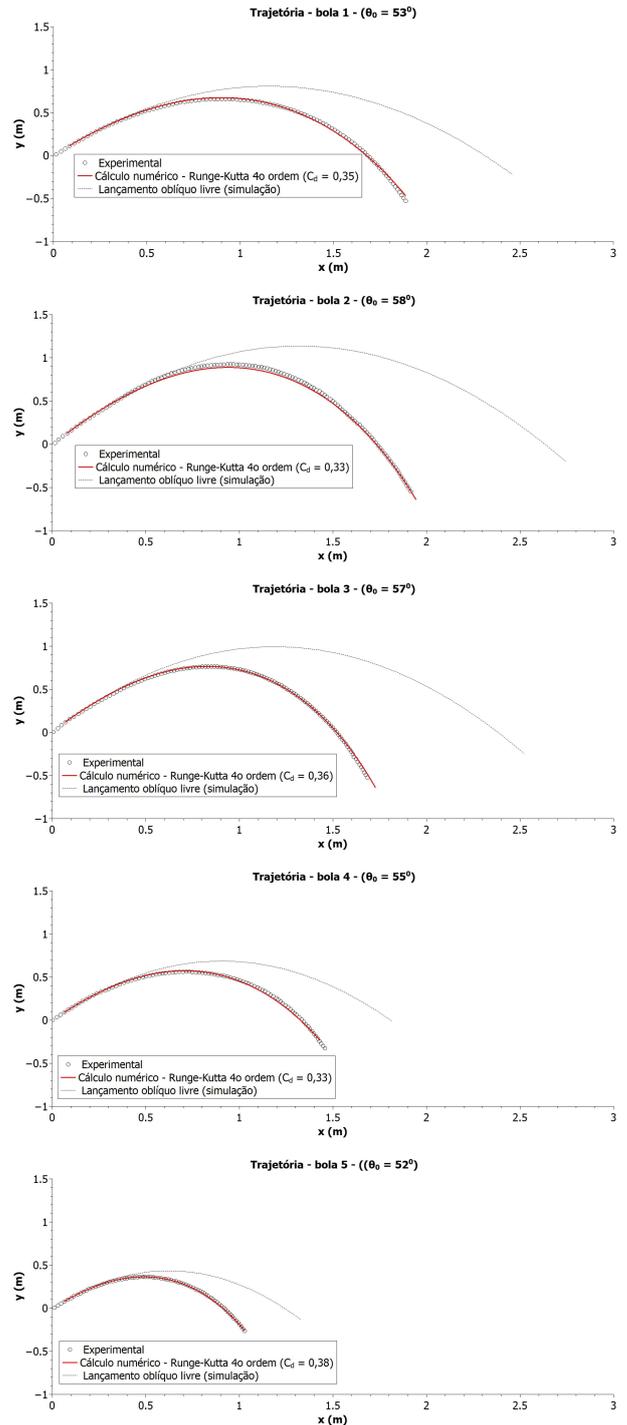


Figura 2: Trajetórias referentes aos lançamentos das bolas de isopor. Os pontos experimentais são superpostos ao cálculo numérico realizado pelo método Runge-Kutta de quarta ordem (linha vermelha). A trajetória de cada esfera, caso fosse lançada no vácuo (linha preta) considerando as mesmas condições iniciais de lançamento no ar, é apresentada para comparação.

A trajetória de cada esfera, caso fosse lançada no vácuo, é representada considerando-se as mesmas condições iniciais de lançamento no ar. As condições iniciais referentes às componentes das velocidades para a realização

Tabela 2: Velocidades iniciais, números de Reynolds e valores do coeficiente de arrasto (C_D) utilizados para gerar as curvas obtidas por cálculo numérico utilizando RK4.

Bola	v_{0x} (m/s)	v_{0y} (m/s)	v_0 (m/s)	Re	C_D
1	2,843	3,684	4,653	$2,3 \times 10^4$	0,35
2	2,729	4,443	5,214	$1,7 \times 10^4$	0,33
3	2,648	4,134	4,909	$1,1 \times 10^4$	0,36
4	2,413	3,410	4,177	$6,8 \times 10^3$	0,33
5	2,074	2,636	3,354	$3,3 \times 10^3$	0,38

do cálculo numérico foram obtidas a partir dos dados experimentais da seguinte maneira (ver Tabela 2)

$$v_{x0}(t_3) = \frac{x_6 - x_0}{t_6 - t_0}$$

e

$$v_{y0}(t_3) = \frac{y_6 - y_0}{t_6 - t_0}.$$

O intervalo de tempo $t_6 - t_0$ é ainda pequeno o suficiente e nos permite considerar o impulso produzido pelas forças de arrasto e gravitacional aproximadamente nulo. Consideramos o intervalo de tempo $t_6 - t_0$ com o intuito de obter um deslocamento $\Delta x(\Delta y)$ maior que a incerteza associada $\delta x(\delta y)$. Esse procedimento foi utilizado na obtenção de todas as velocidades.

O parâmetro C_D foi modificado manualmente até que fosse obtida a melhor superposição da curva gerada por RK4 e os dados experimentais. Na Tabela 2, são apresentados os valores das velocidades iniciais, os números de Reynolds e os coeficientes de arrasto C_D utilizados no cálculo numérico RK4. Os valores variam entre 0,33 e 0,38, o que é compatível com aqueles apresentados na literatura [6, 10].

A Figura 3 apresenta as componentes $x(t)$ e $y(t)$ referentes ao lançamento de cada bola de isopor. Os pontos experimentais são comparados ao cálculo numérico (RK4). No caso da coordenada $x(t)$, nota-se uma diminuição da inclinação da curva ajustada em relação à curva teórica para um lançamento oblíquo sem arrasto, indicando uma atenuação da componente horizontal da velocidade. Em relação à coordenada $y(t)$, notamos claramente uma diminuição dos máximos das curvas ajustadas em comparação à coordenada $y(t)$ da situação sem arrasto, o que pode ser interpretado como uma variação (em módulo) da aceleração vertical em relação à aceleração gravitacional local, esperada no caso simulado sem arrasto.

A Figura 4 apresenta as componentes $v_x(t)$ e $v_y(t)$ referentes ao lançamento de cada bola de isopor. Os pontos experimentais são comparados ao cálculo numérico (RK4). As componentes $v_x(t)$ e $v_y(t)$ de cada esfera, caso fossem lançadas no vácuo, são representadas considerando as mesmas condições iniciais do lançamento no ar. Diferente do caso sem arrasto, em que a velocidade horizontal é constante, a componente $v_x(t)$ apresenta

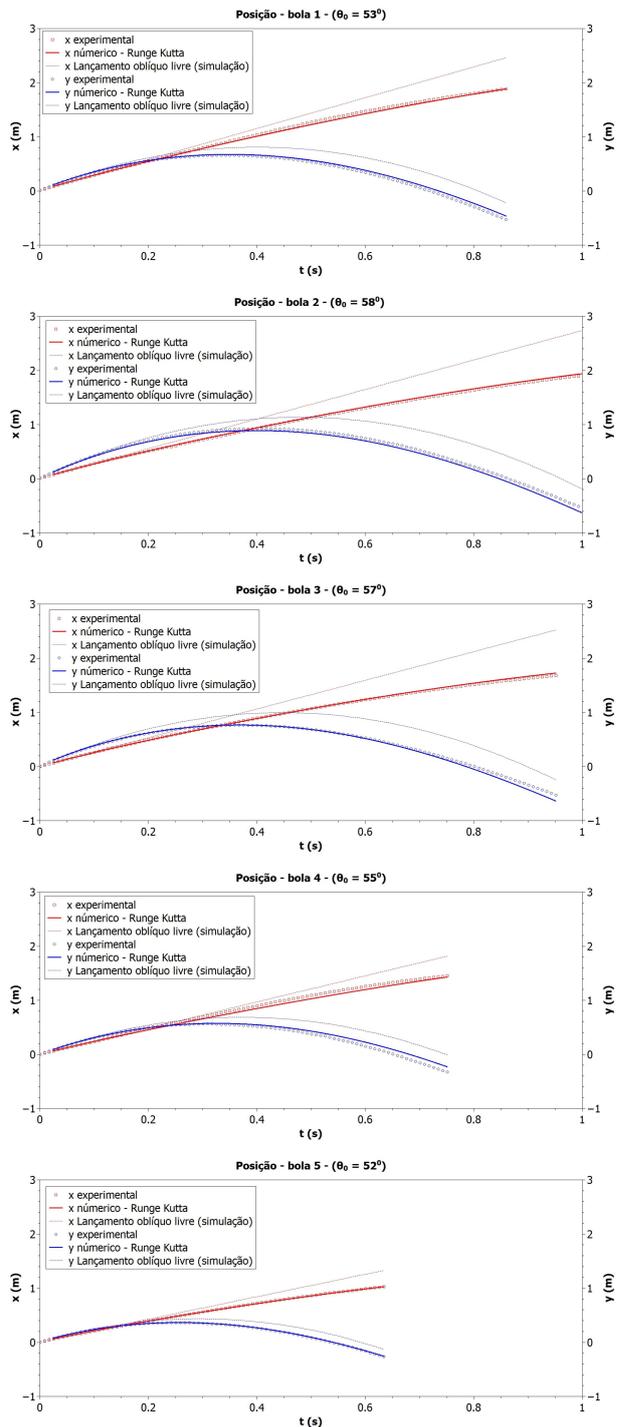


Figura 3: Componentes $x(t)$ e $y(t)$ referentes ao lançamento de cada bola de isopor. Os pontos experimentais são comparados ao cálculo numérico realizado pelo método Runge-Kutta de quarta ordem. As componentes $x(t)$ e $y(t)$ de cada esfera, caso fossem lançadas no vácuo, são representadas considerando as mesmas condições iniciais do lançamento no ar.

uma diminuição, que é consequência direta do arrasto. Já a componente $v_y(t)$ deixa de ser uma função do primeiro grau, significando uma aceleração vertical que não é mais constante, diferindo da aceleração gravitacional.

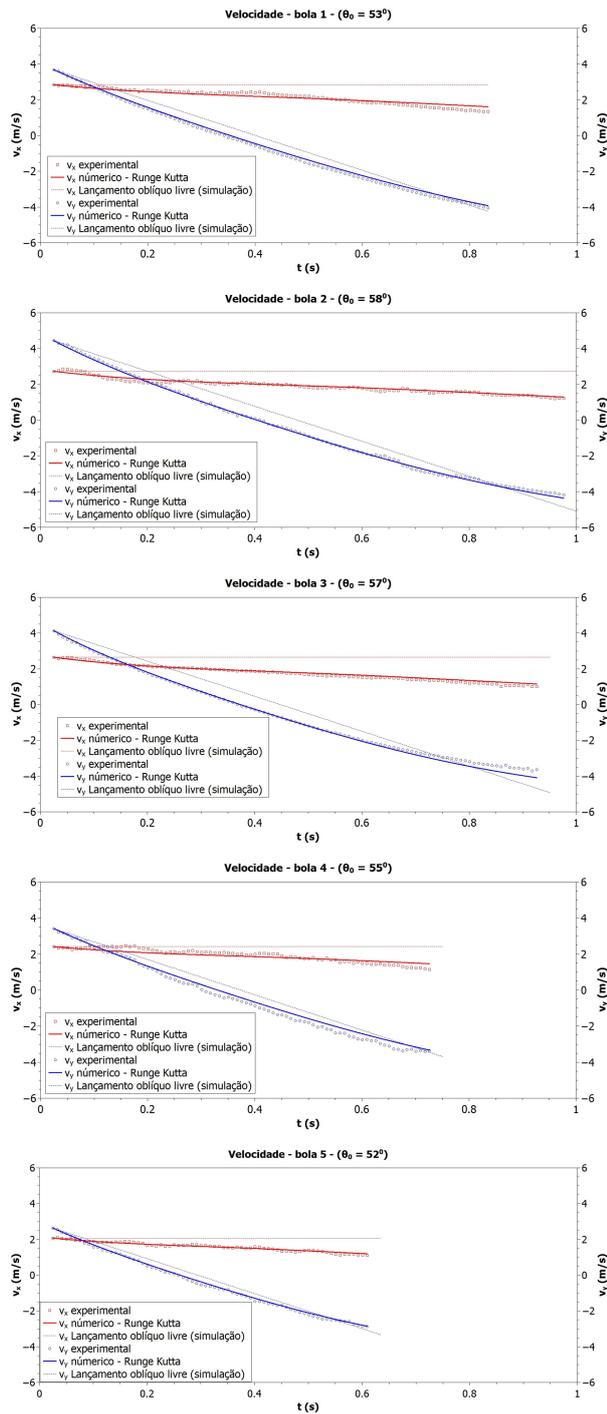


Figura 4: Componentes $v_x(t)$ e $v_y(t)$ referentes ao lançamento de cada bola de isopor. Os pontos experimentais são comparados ao cálculo numérico realizado pelo método Runge-Kutta de quarta ordem. As componentes $v_x(t)$ e $v_y(t)$ de cada esfera, caso fossem lançadas no vácuo, são representadas considerando as mesmas condições iniciais do lançamento no ar.

Os números de Reynolds associados às velocidades envolvidas neste experimento encontram-se entre 10^3 e 3×10^4 . Nesta faixa, o parâmetro C_D é compatível com um valor aproximadamente constante que estaria entre 0,2 e 0,6 [6, 10].

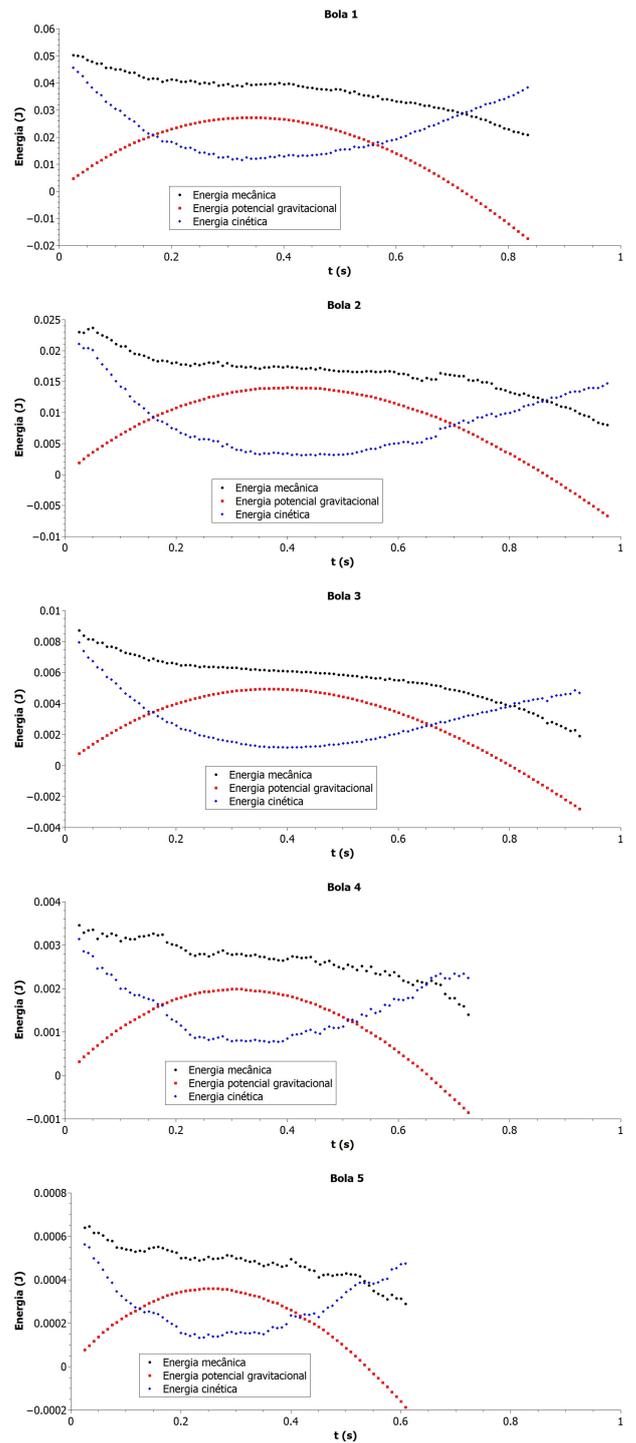


Figura 5: Energias cinética, potencial gravitacional e mecânica referentes aos lançamentos das bolas de isopor. Em todos os casos a queda da energia mecânica ao longo do tempo é evidente.

Por fim, apresentamos na Figura 5 os gráficos das energias cinética, potencial gravitacional e mecânica em função do tempo, associados aos cinco lançamentos (considerando o sistema como sendo Terra – bola de isopor – atmosfera). Note que o trabalho das forças externas W_{ext} deve ser igual à variação da energia mecânica do sistema

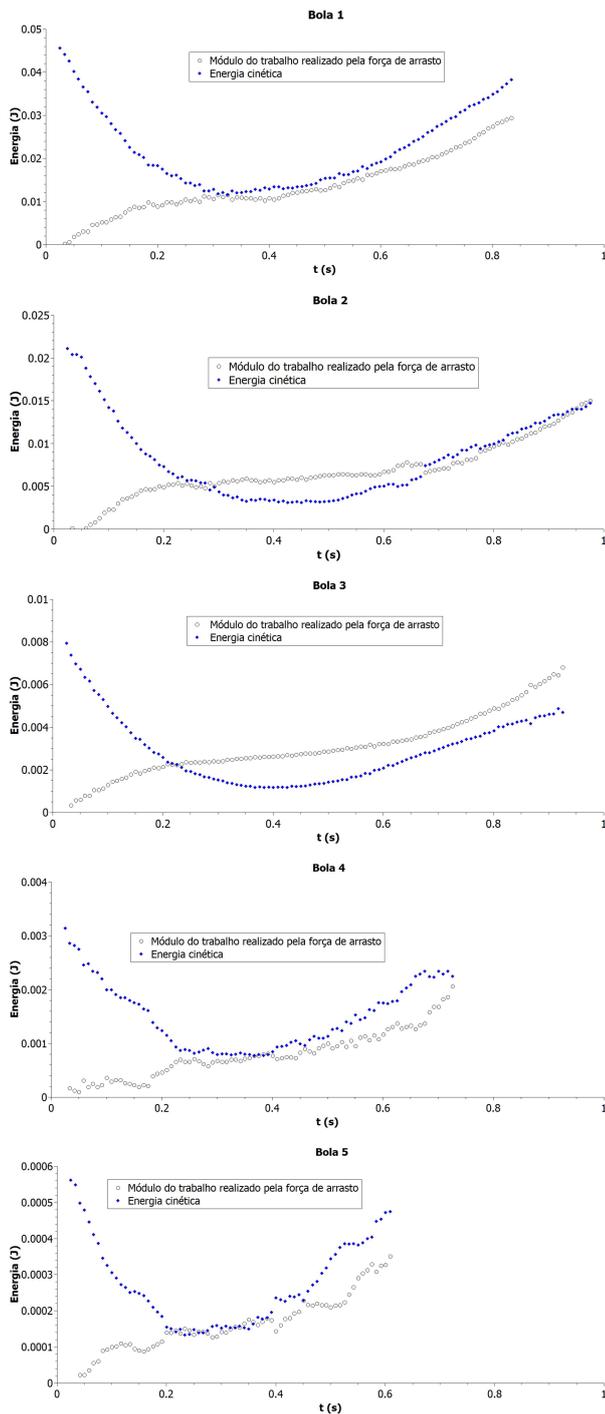


Figura 6: Energia cinética e o módulo do trabalho realizado pela força de arrasto.

ΔE_{mec} menos o trabalho realizado pelas forças internas não conservativas W_{nc} . Dessa forma, podemos escrever

$$W_{ext} = \Delta E_{mec} - W_{nc}.$$

No caso de $W_{ext} = 0$ e $W_{nc} = 0$, a equação (14) nos leva a $\Delta E_{mec} = 0$, que implica na conservação da energia mecânica do sistema.

No sistema investigado neste trabalho, $W_{ext} = 0$. Portanto, podemos associar a variação de energia mecânica mensurada ao trabalho das forças internas não-conservativas. De fato, a Figura 5 revela uma diminuição da energia mecânica (soma das energias cinética e potencial gravitacional) ao longo do tempo em relação à energia inicialmente transferida à bola no lançamento oblíquo, ou seja, $\Delta E_{mec} \neq 0$. Nota-se que a energia cinética vai diminuindo à medida em que a esfera se afasta da Terra e ganha energia potencial gravitacional, conforme esperado. Ainda é possível observar que a maior variação da energia mecânica está associada aos intervalos de tempo com maiores valores da energia cinética, o que está em acordo com o fato de a força de arrasto ter sua intensidade proporcional ao quadrado da velocidade.

A Figura 6 apresenta o módulo do trabalho realizado pela força de arrasto em função do tempo (círculo aberto em preto). Para efeitos de comparação, apresentamos a energia cinética ao longo do tempo (diamante fechado em azul). É possível observar em todos os casos que a taxa de variação do módulo do trabalho da força de arrasto é maior nos intervalos de tempo em que se observa maior taxa de variação da energia cinética. Isso fica evidenciado, por exemplo, no caso da bola 3, no intervalo de 0 a 0,2 s e de 0,7 a 0,9 s. Entre 0,2 e 0,7 s, a variação da energia cinética é muito baixa devido à inversão do sentido do movimento na vertical.

4. Considerações Finais

O arranjo experimental e a técnica de videoanálise permitiram estudar em detalhes os efeitos da força de arrasto, proporcional ao quadrado da velocidade, em lançamentos oblíquos de cinco diferentes bolas de isopor no ar, fornecendo uma comparação entre os dados experimentais e os lançamentos oblíquos idealizados sem ação da força de arrasto.

Comparamos os dados experimentais com o modelo teórico por meio de equações diferenciais acopladas para o movimento do projétil no plano vertical xy . Uma vez que as equações diferenciais acopladas não apresentam solução analítica, os dados experimentais foram comparados ao modelo teórico utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem para executar o cálculo numérico.

Obtivemos as energias cinética, potencial gravitacional e mecânica do sistema. Apresentamos também o módulo do trabalho realizado pela força de arrasto em função do tempo, e mostramos que em todos os casos a taxa de variação do módulo do trabalho da força de arrasto é maior nos intervalos de tempo em que se observa maior taxa de variação da energia cinética.

Referências

[1] P.A. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers* (W.H. Freeman, New York, 2007), 6 ed.

- [2] D. Halliday, R. Resnick e J. Walker, *Fundamentals of Physics* (Wiley, Hoboken 2007), v. 3, 8 ed.
- [3] G.W. Parker, Am. J. Phys. **45**, 606 (1977).
- [4] W.H.C. Freire, M.L. Medeiros, D. Leite e R.M. Silva, Revista Brasileira de Ensino de Física **38**, 1306 (2016).
- [5] P. Chudinov, V. Eltyshev e Y. Barykin, Revista Brasileira de Ensino de Física **40**, e1308 (2018).
- [6] A.L. Oliveira, V.L.B. De Jesus e D.G.G. Sasaki, Phys. Educ. **56**, 045005 (2021).
- [7] L.M. Holanda, H.T.C.M. Souza e V. Belo, Revista Brasileira de Ensino de Física **45**, e20230060 (2023).
- [8] R.L. Silveira, Revista Brasileira de Ensino de Física **45**, e20230202 (2023).
- [9] V.B. Mendrot e A.S. Castro, Revista Brasileira de Ensino de Física **45**, e20230186 (2023).
- [10] Y.A. Çengel e J.M. Cimbala, Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications (McGraw-Hill, New York, 2006).
- [11] L. Landau e E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics – Course in Theoretical Physics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1987) v. 6, 2 ed.
- [12] R.A. Millikan, Law. Phys. Rev. (Series I) **32**, 349 (1911).
- [13] P. Stark, *Introdução aos Métodos Numéricos* (Interciência, Rio de Janeiro, 1979).
- [14] D. Brown e A.J. Cox, The Physics Teach **47**, 328, 2009.
- [15] V.L.B. De Jesus, *Experiments and Video Analysis in Classical Mechanics* (Springer, Cham, 2017).
- [16] TRACKER: software website, disponível em: <http://physlets.org/tracker>, acessado em 02/10/2023.